動的数学ソフトウェア GeoGebra 入門

濱田龍義（福岡大学/JST CREST）

January 10, 2012

動的幾何学ソフトウェアとは？

「動的幾何学ソフトウェア」 (Dynamic Geometry Software) とは, コンパスと定規の代わりにコンピュータを用いて作図を行うソフトウェアのことである.

「対話式幾何学ソフトウェア」 (Interactive Geometry Software) もしくは「作図ツール」とも呼ばれる.

動的幾何学ソフトウェア

- Cabri (1985-)
- Geometer's Sketchpad (1991-)
- Dr. Geo (1996-)
- C.a.R. (1996-)
- Cinderella (1998-)
- KSEG (1999-2006)
- GeoGebra (2001-)
- GeoProof (2006?)
- KidsCindy (2008?-)
- Apollonius (2010-)
- ...

動的数学ソフトウェア

「動的幾何学ソフトウェア」 (Dynamic Geometry Software) は，コンパスと定規をコンピュータソフトウェアで置き換えたものであった．

「動的数学ソフトウェア」(Dynamic Mathematics Software) は，（初等）幾何学だけでなく，様々な数学の概念を動的に (Dynamic に) 取り扱うソフトウェアである．

GeoGebra=Geometry+Algebra

- Prof. Markus Hohenwarter (Johannes Kepler Universität)

- Java 言語を用いて
  オープンソースソフトウェアとして開発中.

  Keyword J2SDK, Eclipse, Subversion, Javascript, . . .
- 最新版は 4.0.18.0
- その他に，4.2 系 5.0 系 (3D 版) の β 版が公開.
- 全世界で数十万人以上の利用者
- 教育ソフトウェアランキング世界 50 位

講義予定

1. 1 変数函数
2. 1 変数函数の平均変化率，微分係数，導函数
3. 平面曲線の媒介変数表示，ベクトル値函数
4. GeoGebra の導入
5. GeoGebra による曲線の描画
6. 様々な平面曲線
7. ベクトル値函数の微分，平面曲線の接ベクトル
8. 平面曲線の曲率
9. 平面曲線の接触円
10. 与えられた函数を曲率に持つ平面曲線の構築

平均変化率，微分係数，導函数

1 変数函数 $f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$

$x = a$ における $f(x)$ の平均変化率

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$x = a$ における $f(x)$ の微分係数

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$f'(x)$ を $f(x)$ の導函数，もしくは微分と呼ぶ.

曲線

曲線 $\mathbf{p}$ の媒介変数表示

$$\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t))$$

曲線 $\mathbf{p}$ のベクトル値函数による表示

$$\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

GeoGebra の導入

1. Web ブラウザ（Mozilla Firefox, IE 等）を起動する．
2. `http://www.knoppix-math.org/wiki/` を開く．
3. 左側メニューにある ocami2012 というページを開く．
4. 「GeoGebra4 WebStart」をクリックする．
5. GeoGebra がダウンロードされて起動されるまで待つ．
6. デスクトップにシンボリックリンクが作成されるので，以降はデスクトップのアイコンをクリックすることで起動できる．

GeoGebra による曲線の描画

1. GeoGebra を起動する.
2. スライダーボタンをクリックして，最小 -2, 最大 2, 増分 0.1 となるようにスライダーを作成する.
3. 「入力:」欄に (t, t) を入力して点 A を作成する.
4. スライダー上の点を動かして t を変化させて点 A の動きを確認する.
5. 点 A を右クリックして,「残像表示」を選びチェックを入れる.
6. スライダー上の点を動かして t を変化させてみる.
7. 点 A の残像表示が確認できたら，今度はスライダーを右クリックして「アニメーション」を選びチェックを入れる.
8. スライダーを右クリックして「プロパティ」を選択,「スライダー」→「アニメーション」→「反復」を振動から増加に変更する.

様々な曲線の媒介変数表示

名称	媒介変数表示	入力
直線	(t, t)	(t, t)
直線	$(at+b, ct+d)$	(2t+1, t+3)
放物線	(t, t^2)	(t, t^2)
Cusp	(t^2, t^3)	(t^2, t^3)
葉線	$\left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$	(3t/(1+t^3),略)
円	$\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$	(2t/(1+t^2),略)
円	$(\cos t, \sin t)$	(cos(t), sin(t))
楕円	$(a\cos t, b\sin t)$	(4cos(t), 2sin(t))
双曲線	$(\cosh t, \sinh t)$	(cosh(t), sinh(t))
擺線	$(t-\sin t, 1-\cos t)$	(t-sin(t), 1-cos(t))
リサージュ	$(\cos at, \sin bt)$	(cos(4t), sin(7t))

ベクトル値函数の微分

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} &= \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \\ \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{y(t+h)-y(t)}{h} \end{pmatrix} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\begin{pmatrix} x(t+h) \\ y(t+h) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\mathbf{p}(t+h)-\mathbf{p}(t))
\end{aligned}
$$

曲率

曲線 $\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ の曲率

$$\kappa(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

接触円（曲率円）の半径を r とすると，

$$\kappa(t) = \frac{1}{r}$$

Theorem 4.12 (Gray-Abbena-Salamon, p109)

$\mathbf{p}(t)$: 平面曲線, $a < t < b$

$\mathcal{C}(t_1, t_2, t_3)$: $\mathbf{p}(t_1), \mathbf{p}(t_2), \mathbf{p}(t_3)$ を通る円

$\mathcal{C}$: $\mathbf{p}(t_0)$ における接触円

$$\Longrightarrow \mathcal{C} = \lim_{\substack{t_1 \to t_0 \\ t_2 \to t_0 \\ t_3 \to t_0}} \mathcal{C}(t_1, t_2, t_3)$$

縮閉線 (evolute)

接触円の中心が描く曲線

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \frac{J\mathbf{p}'(t)}{|\mathbf{p}'(t)|}$$

Theorem 5.14 (Gray-Abbena-Salamon, p137)

$$\begin{aligned} k(x) &: \text{区分的に連続な函数} \\ f(x) &= \int k(x)dx + f_0 \\ g(x) &= \cos(f(x)) \\ h(x) &= \sin(f(x)) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$
曲率 $k(s)$ を持つ曲線が得られる.

$$\mathbf{p}(s) = \begin{pmatrix} \int g(s)ds + g_0 \\ \int h(s)ds + h_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int \cos(f(s))ds + g_0 \\ \int \sin(f(s))ds + h_0 \end{pmatrix}$$

シンプソンの公式

積分の近似値を計算する公式
被積分函数 $f(x)$ を区分的に二次函数で近似することで得られる.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}\left(f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n)\right)$$

ただし, $x_0 = a, x_i = a + \dfrac{b-a}{n}i, x_n = b$

Gray-Abbena-Salamon Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, Third Edition, 2006.6.21, Chapman and Hall/CRC, ISBN-13: 978-1584884484

小林昭七 曲線と曲面の微分幾何, 1995.9.1 裳華房, ISBN-13: 978-4785310912

GeoGebra http://www.geogebra.org/

GeoGebra 日本 https://sites.google.com/site/geogebrajp/

KNXM Wiki http://www.knoppix-math.org/wiki/

WikiPedia http://ja.wikipedia.org/wiki/動的幾何学ソフトウェア

Weisstein, Eric W. "Plane Curves." From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/topics/PlaneCurves.html